

I principi della meccanica quantistica
nella scuola secondaria
Un contributo

Paolo Cavallo

10 marzo 2004

Sommario

Si riassume una strategia per la presentazione dei principi della meccanica quantistica con strumenti matematici al livello della scuola superiore. La strategia è basata sullo studio elementare di alcuni sistemi a due stati. Le idee di fondo risalgono all'opera di Feynman e sono riprese da alcuni testi recenti. L'approccio proposto non è inteso come alternativo, ma come complementare a quello tradizionale, che riepiloga lo sviluppo storico.

Indice

1	L'esperienza di Stern e Gerlach	3
1.1	Il moto di un ago magnetico in un campo magnetico non uniforme	3
1.2	Lo spin	4
2	Un sistema quantistico a due stati	6
2.1	La misura delle componenti dello spin	6
2.2	Misure ripetute e misure consecutive	7
2.3	Il carattere probabilistico della meccanica quantistica	8
3	Da Einstein a Bell	10
3.1	Il paradosso di Einstein–Podolsky–Rosen	10
3.2	Il teorema di Bell	11
4	I principi della meccanica quantistica	13
4.1	L'interferometro	13
4.2	Interferenza di onde e di atomi	15
4.3	Ampiezze e probabilità	16

1 L'esperienza di Stern e Gerlach

1.1 Il moto di un ago magnetico in un campo magnetico non uniforme

Il comportamento di un ago magnetico (come quello di una bussola) o di una spira circolare di corrente in un campo esterno può essere descritto da una grandezza vettoriale chiamata *momento magnetico* $\vec{\mu}$. Se un ago magnetico (o un altro sistema dotato di momento magnetico) si trova in un campo magnetico uniforme \vec{B} , tende a ruotare in modo da allineare il proprio momento magnetico con il campo magnetico esterno. In altri termini, il sistema subisce un momento torcente $\vec{\tau}$ direttamente proporzionale a $\vec{\mu}$ e a \vec{B} .

In generale, il momento magnetico di un sistema formato da cariche in moto è proporzionale al suo momento angolare \vec{L} . In questi casi, come nel moto di un giroscopio soggetto alla forza peso, l'effetto del momento torcente non è quello di costringere $\vec{\mu}$ ad allinearsi con \vec{B} , ma di farlo *precedere* intorno alla direzione del campo.

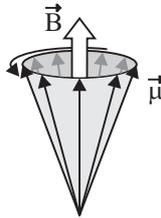


Figura 1: Precessione di $\vec{\mu}$ intorno a \vec{B}

Un comportamento particolarmente interessante è previsto (ed effettivamente osservato) quando il campo \vec{B} non è uniforme, bensì ha un'intensità crescente lungo la direzione del campo stesso. In un campo non uniforme un sistema dotato di momento magnetico non si limita a precedere intorno alla direzione del campo, ma subisce anche una deflessione parallela al campo e proporzionale alla componente di $\vec{\mu}$ lungo \vec{B} .

Se un fascio di particelle dotate di uno stesso momento magnetico entra in una regione dello spazio dove esiste un campo magnetico non uniforme, il fascio si dividerà in tanti fasci secondari quanti sono i possibili valori della componente di $\vec{\mu}$ lungo \vec{B} .

La figura (2) raffigura schematicamente il moto di tre particelle dotate di momento magnetico (è rappresentato soltanto il momento magnetico, con un vettore diversamente orientato rispetto a un campo magnetico non uniforme). Si vede che le tre particelle, oltre a precedere, possono subire una deflessione positiva, nulla o negativa rispetto alla direzione del campo. In questo modo è possibile misurare la componente di $\vec{\mu}$ lungo \vec{B} misurando la deflessione subita da ciascun fascio.

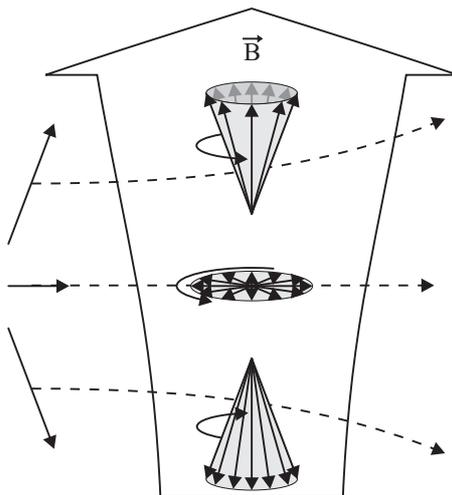


Figura 2: Effetto di un campo non uniforme su particelle dotate di momento magnetico

1.2 Lo spin

La teoria così schematizzata è alla base di un risultato estremamente importante della teoria atomica.

In tutti i modelli atomici (come quello di Rutherford del 1911 o quello di Bohr del 1913) in cui gli elettroni orbitano intorno al nucleo atomico, si prevede che l'atomo abbia un momento magnetico $\vec{\mu}$, simile a quello di un'anello di corrente che circonda il nucleo. A causa del moto orbitale degli elettroni, l'atomo dovrebbe avere anche un momento angolare \vec{L} , e $\vec{\mu}$ e \vec{L} dovrebbero risultare proporzionali.

Di conseguenza, un fascio di atomi che attraversi un campo magnetico non uniforme dovrebbe "sparpagliarsi" a causa della differente deviazione di ciascun atomo. In effetti, l'orientamento del momento magnetico dell'atomo non può essere che casuale, e ugualmente casuale dev'essere il valore della componente di $\vec{\mu}$ lungo \vec{B} . Nel seguito supporremo che \vec{B} sia orientato lungo l'asse z , e indicheremo con μ_z la corrispondente componente di $\vec{\mu}$.

La meccanica classica prevede quindi che l'immagine di un fascio di atomi ben collimato, dopo il passaggio attraverso un campo magnetico non uniforme, risulti allargata entro un limite superiore e un limite inferiore, corrispondenti a $\mu_z = +|\vec{\mu}|$ e $\mu_z = -|\vec{\mu}|$. Tutti i valori di μ_z fra questi estremi sono permessi.

La teoria quantistica di Bohr-Sommerfeld prevedeva invece che i valori permessi di μ_z fossero *quantizzati*: che formassero cioè un insieme di valori discreti, separati da intervalli proibiti di ampiezza \hbar .

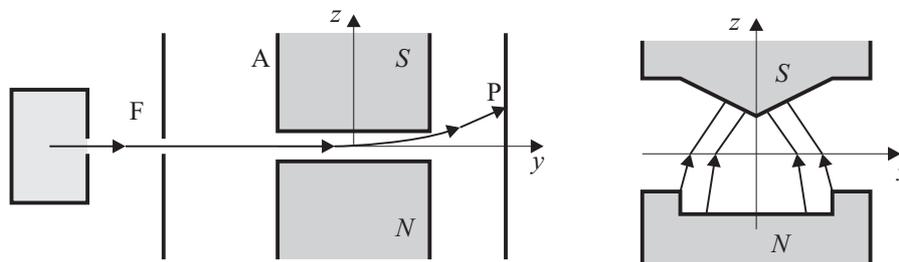


Figura 3: Apparato di Stern e Gerlach

Le previsioni della meccanica classica e della teoria quantistica di Bohr-Sommerfeld furono messe alla prova da una serie di esperimenti condotti da Stern e Gerlach nel 1922 (vedi [1],

[10], [11]). In un esperimento di questo tipo, rappresentato nella figura (3), un fascio di atomi d'argento viene prodotto in un forno e fatto passare attraverso un collimatore, in modo da ottenere un fascio molto stretto e caratterizzato da un valore ben definito della velocità. Il fascio viene poi fatto passare attraverso un apparato costituito dalle espansioni di un magnete sagomate in modo da ottenere un campo magnetico non uniforme. Nella zona attraversata dal fascio il campo, diretto come l'asse z , ha un'intensità minore in prossimità del polo Nord e un'intensità maggiore in prossimità del polo Sud.

Dopo molti sforzi, Stern e Gerlach riuscirono ad ottenere un risultato inequivocabilmente in accordo con la previsione quantistica. Come indicato nella figura (4), il fascio risultò diviso in due fasci simmetrici rispetto alla direzione di partenza, corrispondenti a due valori uguali e opposti di μ_z , ben distinti fra loro.

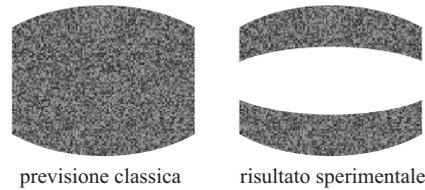


Figura 4: Esito dell'esperimento di Stern e Gerlach

L'interpretazione corretta dell'esperimento di Stern e Gerlach non fu immediata. Esso costituiva chiaramente una smentita della meccanica classica e una conferma *qualitativa* della teoria quantistica. Quando nel 1926 Schrödinger formulò la nuova meccanica quantistica e il calcolo di Bohr-Sommerfeld fu rivisto, si vide però che, se il momento magnetico misurato fosse stato dovuto al moto degli elettroni relativamente al nucleo, ci si sarebbe dovuti attendere un numero *dispari* di fasci all'uscita dell'apparato di Stern e Gerlach. Ben presto si scoprì che tale ipotesi era sbagliata, e che il momento magnetico degli atomi era dovuto a una proprietà dell'elettrone priva di un corrispettivo classico: lo *spin*.

Nel seguito non si cercherà più approfondire il legame fra lo spin e la fisica atomica quantistica di Bohr o di Schrödinger. Si presenterà invece l'esperienza di Stern e Gerlach come una misura del (la componente z del) lo spin e si tratterà lo spin come una proprietà quantomeccanica elementare.

2 Un sistema quantistico a due stati

2.1 La misura delle componenti dello spin

Un esperimento di Stern e Gerlach come quello descritto nella figura (3) permette di misurare la componente z del momento magnetico di spin, e quindi dello spin, di un atomo Ag lungo la direzione nella quale è orientato il campo magnetico \vec{B} . L'esperienza dimostra che questa componente può assumere soltanto due valori, corrispondenti a due fasci emergenti deviati in maniera uguale e opposta rispetto alla direzione iniziale del fascio. In uno dei due fasci la componente s_z dello spin è orientata nello stesso verso di \vec{B} , mentre nell'altro fascio essa è orientata nel verso opposto. Indicheremo i due valori possibili di s_z con i simboli s_+ e s_- . Questo risultato mette in luce il primo aspetto notevole del comportamento dei sistemi quantistici:

- *Una grandezza fisica può essere in generale quantizzata, e il suo valore può essere ristretto a un insieme predefinito di valori discreti.*

Un apparato di Stern e Gerlach fornisce la parte essenziale del dispositivo che utilizzeremo spesso negli esempi che seguono e che chiameremo *analizzatore*. Un analizzatore è una scatola con un ingresso e due uscite, contrassegnate dai simboli “+” e “-”. All'interno della scatola è contenuto un apparato di Stern e Gerlach, con il campo magnetico orientato secondo la freccia indicata sulla scatola, e alcuni accorgimenti che fanno sì che i due fasci emergenti abbiano direzioni parallele alla direzione del fascio di ingresso.

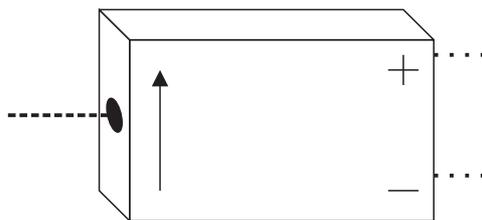


Figura 5: Analizzatore di Stern e Gerlach orientato lungo z

Se un fascio qualunque di atomi entra in un analizzatore orientato lungo l'asse z , otterremo in uscita due fasci. Nel fascio uscente dall'uscita “+” gli atomi avranno $s_z = s_+$, nell'altro fascio gli atomi avranno $s_z = s_-$, e la somma delle intensità dei due fasci sarà uguale all'intensità del fascio in ingresso.

Le stesse osservazioni si applicano a un analizzatore orientato ad esempio lungo l'asse x , come quello rappresentato nella figura (6).

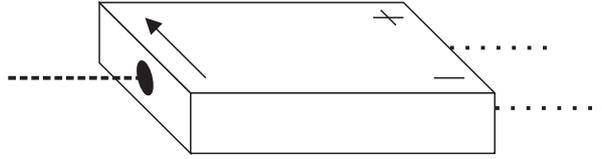


Figura 6: Analizzatore di Stern e Gerlach orientato lungo x

L'esperienza dimostra che, qualunque sia l'orientamento dell'analizzatore, il fascio si divide *sempre* in due fasci, corrispondenti ai valori s_+ e s_- della componente dello spin lungo la direzione dell'analizzatore.

2.2 Misure ripetute e misure consecutive

Il risultato appena enunciato appare paradossale. Supponiamo di misurare la componente dello spin di un atomo lungo l'asse x , ottenendo il valore s_+ . Misuriamo subito dopo la componente z , ottenendo ancora s_+ . Ora ci sembra di poter affermare che l'atomo ha $s_x = s_+$ e $s_z = s_+$. Ma, in tal caso, misurando la componente dello spin lungo un asse w intermedio fra x e z , dovremmo ottenere $s_w = \sqrt{2} s_+$. Invece, se realizziamo la nuova misura, scopriamo ancora che i soli valori possibili sono s_{\pm} .

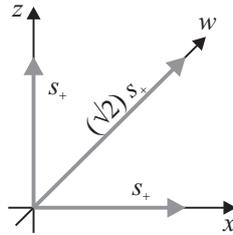


Figura 7: Componenti dello spin lungo assi qualsiasi, secondo la fisica classica

Per cercare di capire in che modo si possa sciogliere questo paradosso, consideriamo una serie di esperimenti.

Una misura di s_z seguita da una seconda misura di s_z Facciamo passare un fascio di atomi in un analizzatore orientato lungo l'asse z , bloccando l'uscita “-”. Facciamo quindi entrare gli atomi emergenti dall'uscita “+” in un secondo analizzatore, identico al primo. In altri termini, ripetiamo immediatamente la misura appena realizzata.

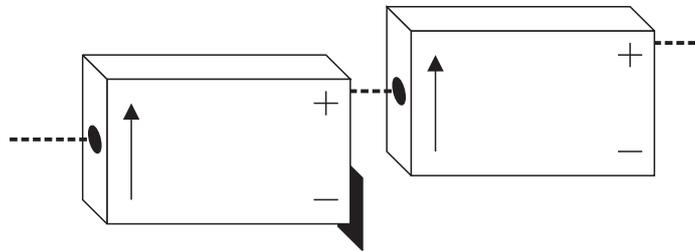


Figura 8: Misure consecutive della stessa componente dello spin

Il risultato è quello che potremmo considerare ovvio. Tutti gli atomi che emergono dal

primo analizzatore emergono dall'uscita “+” del secondo analizzatore. In questa situazione ci sembra di poter affermare che ciascuno degli atomi ha una componente z dello spin pari a s_+ .

Una misura di s_z seguita da una misura di s_{z-} Ora ribaltiamo il secondo analizzatore, in modo che esso misuri la componente s_{z-} del fascio intermedio.

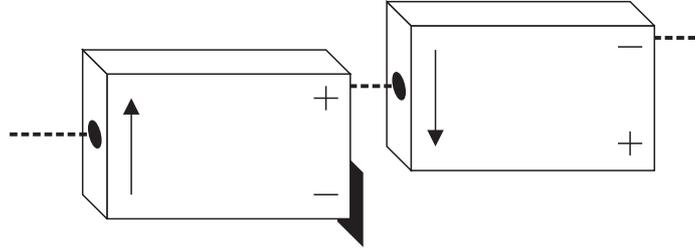


Figura 9: Misure ripetute della stessa componente dello spin dopo un'inversione

In questo secondo caso, come potremmo aspettarci, tutti gli atomi del fascio finale emergono dall'uscita “-” del secondo analizzatore. Ribaltare l'analizzatore non cambia quindi il risultato.

Una misura di s_z seguita da una misura di s_x e da una nuova misura di s_z Questo è l'esperimento decisivo. Fra i due analizzatori del secondo esperimento interponiamo un analizzatore orientato lungo x , del quale ignoriamo l'uscita “-”. Il fascio emergente dal primo analizzatore ha $s_z = s_+$ e il fascio emergente dal secondo ha $s_x = s_+$. Possiamo dire di questo secondo fascio che sia ancora $s_z = s_+$? Se così fosse, tutti gli atomi dovrebbero emergere dall'uscita “-” del terzo analizzatore.

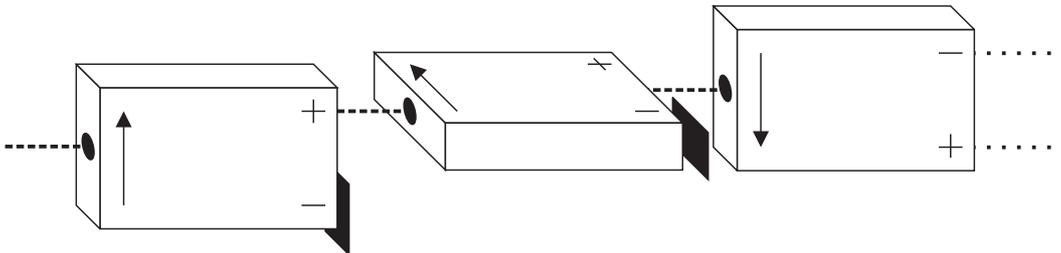


Figura 10: Misure consecutive di componenti lungo assi diversi

L'esperienza dimostra che il 50% degli atomi osservati in uscita emerge dall'uscita “+” del terzo analizzatore e il 50% emerge dall'uscita “-”. Il fascio intermedio che emerge dal secondo analizzatore ha un valore definito di s_x ($s_x = s_+$), ma non ha più un valore definito di s_z . Non è possibile misurare consecutivamente s_x e s_z , se non distruggendo l'informazione ottenuta dalla prima delle due misure.

2.3 Il carattere probabilistico della meccanica quantistica

Il paradosso formulato in precedenza non corrisponde quindi a una situazione fisica verificabile sperimentalmente. *Non è possibile assegnare simultaneamente un valore definito a due diverse componenti dello spin*, e la situazione rappresentata in figura (7) non può essere realizzata.

Cosa possiamo dire allora sulla componente x dello spin, se sappiamo che la componente z ha un valore ben determinato? La meccanica quantistica ci permette di elencare i valori *possibili* di s_x (s_{\pm}) e di associare a ciascuno di essi una *probabilità*. L'esito finale dell'esperimento illustrato dalla figura (10) ci permette soltanto di affermare che un atomo, che ha un

valore ben definito di s_x , è caratterizzato da una probabilità $\frac{1}{2}$ di emergere dal canale “+” o dal canale “-” di un analizzatore orientato lungo z . Lo stesso è vero scambiando il ruolo di x e z .

In base ai dati sperimentali, la probabilità che un atomo, caratterizzato dal valore definito $s_z = s_+$, emerga dall’uscita “+” di un analizzatore, che forma un angolo θ con l’asse z , è uguale a $(\cos(\frac{\theta}{2}))^2$, mentre la probabilità per l’uscita “-” è $(\sin(\frac{\theta}{2}))^2$:

$$\begin{aligned} P_{\theta}(+) &= \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^2 \\ P_{\theta}(-) &= \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^2 \end{aligned} \tag{1}$$

Nel caso di un analizzatore orientato lungo x , $\theta = \pi$ e si ritrovano le probabilità $(\cos(\frac{\pi}{2}))^2 = \frac{1}{2}$ e $(\sin(\frac{\pi}{2}))^2 = \frac{1}{2}$.

Questo ci conduce a esprimere il secondo aspetto notevole del comportamento dei sistemi quantistici:

- *Un sistema fisico caratterizzato da un valore ben definito di una particolare grandezza fisica può essere caratterizzato in generale soltanto dalla probabilità che un’altra grandezza fisica abbia un determinato valore.*

Quando tutte le grandezze fisicamente determinabili per un sistema fisico sono specificate, si dice che è specificato lo *stato* del sistema. Un atomo dotato di spin, che interagisce con un apparato di Stern e Gerlach, costituisce un sistema fisico il cui stato è completamente determinato quando è specificato il valore (s_{\pm}) della componente dello spin lungo *un solo* asse. Non è possibile specificare contemporaneamente *più di una* componente dello spin di una particella.

Poiché la componente specificata dello spin può assumere soltanto due valori, si dice che un atomo dotato di spin costituisce *un sistema a due stati*. I sistemi a due stati sono fenomeni squisitamente quantistici e non ammettono alcun analogo classico.

3 Da Einstein a Bell

3.1 Il paradosso di Einstein–Podolsky–Rosen

In questa sezione discuteremo le notevoli implicazioni di un esperimento ideale proposto nel 1935 da Einstein, Podolsky e Rosen (vedi [2]). L'esperimento richiede un apparato concettualmente molto semplice, rappresentato in figura (11). Una sorgente emette atomi a partire da un sistema con spin totale nullo. Poiché lo spin rispetta il principio di conservazione del momento angolare, i due atomi devono essere emessi con spin opposti. La correttezza dell'ipotesi è garantita dal fatto che, quando facciamo passare i due atomi in due analizzatori orientati allo stesso modo, il risultato è che i due atomi escono sempre da uscite opposte, con valori uguali e opposti della componente dello spin lungo l'asse degli analizzatori.

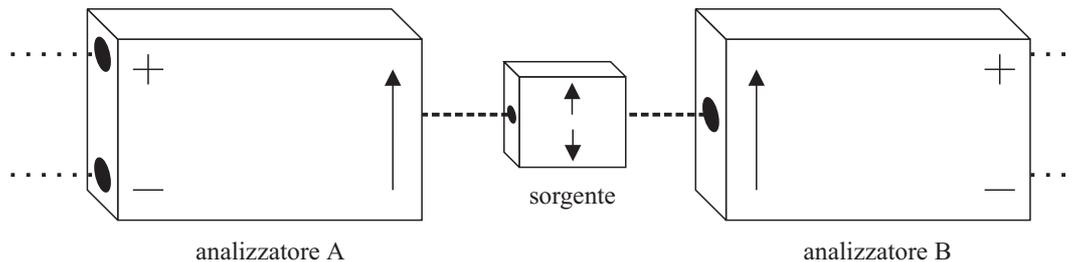


Figura 11: Un apparato per il paradosso EPR

Il ragionamento di Einstein, Podolsky e Rosen, che conduce alla conclusione nota come “paradosso EPR” (dal nome degli autori), può essere espresso semplicemente. Supponiamo di effettuare la misura della componente dello spin dei due atomi lungo un asse qualsiasi. Appena determiniamo il valore per il primo atomo, sappiamo immediatamente che la stessa componente per il secondo atomo ha valore opposto.

Il punto è che gli atomi non hanno modo di sapere in anticipo quale componente dello spin decideremo di misurare. In base alle discussioni precedenti, dobbiamo supporre che la componente richiesta dello spin non abbia un valore definito prima della misura. Eppure, non appena realizziamo la misura sul primo atomo, immediatamente la componente corrispondente del secondo atomo deve assumere anch'essa un valore definito. Questo, anche se i due atomi si trovano a grande distanza. Anche se non è possibile trasmettere in questo modo un'interazione a velocità infinita, sembra sconcertante questa correlazione a distanza fra i due atomi.

L'analisi di Einstein, Podolsky e Rosen giustifica il sospetto che l'indeterminismo postulato dalla meccanica quantistica sia scorretto e che in realtà le componenti dello spin di ciascun atomo siano definite in anticipo e indipendenti dalla misura. In qualche modo, l'informazione

relativa resterebbe inaccessibile per lo sperimentatore. Ma ciascun atomo si limiterebbe a interagire con l'apparato di misura, senza più alcuna correlazione reale con l'altro atomo.

3.2 Il teorema di Bell

Nel 1964 Bell (vedi [3] e [8]) propose un teorema che stabilisce che la meccanica quantistica deve portare a conseguenze sperimentalmente distinguibili da quelle di una teoria che preveda, come vorrebbe Einstein, un valore definito delle componenti dello spin di ciascun atomo.

Supponiamo di modificare l'apparato di figura (11) in modo che ciascuno dei due analizzatori possa essere disposto a caso lungo uno di tre assi: l'asse z , l'asse a 120° nel piano zy e l'asse a 240° .

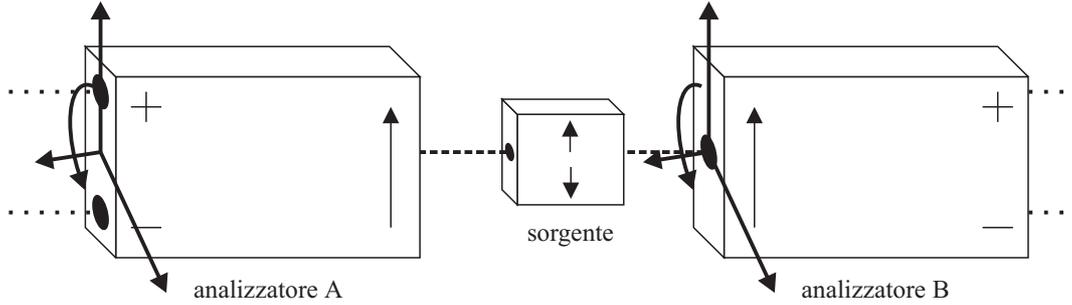


Figura 12: Un apparato EPR modificato

Supponiamo che il primo atomo emerga dall'analizzatore A (orientato a caso lungo uno dei tre assi possibili, ma per semplicità supponiamo orientato lungo z) attraverso l'uscita "+". Determiniamo la probabilità che il secondo atomo emerga dall'analizzatore B attraverso l'uscita "-".

In base alla meccanica quantistica, l'evento richiesto può verificarsi in tre modi indipendenti:

1. l'analizzatore B è orientato anch'esso lungo z ; la probabilità è 1;
2. l'analizzatore B è orientato a 120° ; la probabilità è $(\cos(\frac{120^\circ}{2}))^2 = \frac{1}{4}$;
3. l'analizzatore B è orientato a 240° ; la probabilità è $(\cos(\frac{240^\circ}{2}))^2 = \frac{1}{4}$.

Poiché l'orientamento dell'analizzatore B è casuale, ogni modalità ha probabilità $\frac{1}{3}$ di verificarsi. La probabilità totale è allora:

$$P_{MQ}(-) = \frac{1}{3} \cdot P(1) + \frac{1}{3} \cdot P(2) + \frac{1}{3} \cdot P(3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

dove l'indice MQ indica che questa è la previsione della meccanica quantistica.

Naturalmente il ragionamento non cambia se supponiamo che il primo atomo emerga dall'uscita "-" e chiediamo la probabilità che il secondo atomo emerga dall'uscita "+". Giungiamo alla conclusione che la meccanica quantistica prevede che i due atomi emergano da uscite opposte nel 50% dei casi.

Ora determiniamo la probabilità dell'evento considerato in base a una teoria che preveda in qualche misura un orientamento determinato di ciascun atomo rispetto a ciascun asse. In una teoria del genere (detta "a variabili nascoste") ciascun atomo deve disporre di un "set di istruzioni" che gli permette di decidere da quale uscita emergere per ognuno dei tre orientamenti possibili. Se ad esempio il primo atomo dispone del set {"+" "+" "-"}, allora emergerà dall'uscita "+" di un analizzatore orientato lungo z , dall'uscita "+" di un analizzatore orientato a 120° e dall'uscita "-" di un analizzatore orientato a 240° . In questo caso, il secondo

4 I principi della meccanica quantistica

4.1 L'interferometro

Abbiamo visto come i sistemi quantistici presentino proprietà notevoli di *quantizzazione* e di *indeterminazione probabilistica*. In questa sezione incontreremo un terzo aspetto dei sistemi quantistici, che è in netto contrasto con il comportamento previsto dalla fisica classica.

Ancora una volta ci serviremo di un apparato di Stern e Gerlach modificato. La modifica introdotta in questo caso è molto semplice: di seguito a un analizzatore del tipo già più volte incontrato, disponiamo un apparato che modifica gradualmente la direzione degli atomi emergenti dall'analizzatore, in modo che escano tutti da un'uscita comune. In altri termini, i due fasci uscenti dall'analizzatore vengono ricombinati in un unico fascio. Per ragioni che vedremo, l'apparato così formato è detto *interferometro*.

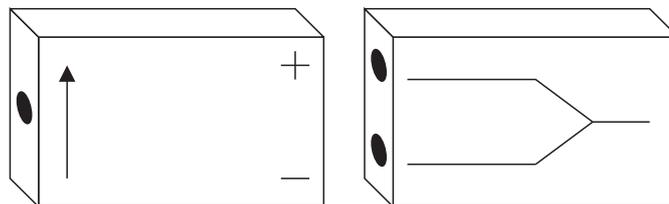


Figura 13: Un interferometro

Ora realizziamo una serie di esperienze con l'interferometro.

Interferometro orientato lungo x con il solo canale “+” aperto Nella prima esperienza allineiamo un analizzatore orientato lungo z , con l'uscita “-” chiusa, un interferometro orientato lungo x , con il canale “-” chiuso, e infine un analizzatore orientato lungo z , con l'uscita “+” chiusa.

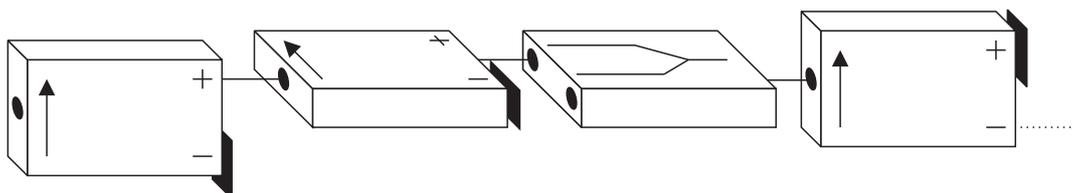


Figura 14: Canale “-” chiuso

Gli atomi che escono dal primo analizzatore hanno un valore ben definito e uguale a s_+ della componente z dello spin. Questi atomi hanno probabilità $\frac{1}{2}$ di attraversare l'interferometro orientato lungo x , dato che possono passare soltanto se all'atto della misura della componente s_x assumono il valore s_+ . A questo punto il valore di s_z non è più definito. Quando gli atomi attraversano il secondo analizzatore orientato lungo z , hanno probabilità $\frac{1}{2}$ di emergere dall'uscita aperta, ora con $s_z = s_-$.

In conclusione: un atomo che entra nell'apparato di figura (14) (il primo analizzatore ha soltanto il compito di preparare il fascio in ingresso nell'apparato) ha probabilità $\frac{1}{4}$ di essere osservato all'uscita “-” dell'ultimo analizzatore.

Interferometro orientato lungo x con il solo canale “-” aperto Ora l'interferometro orientato lungo x ha il canale “+” chiuso.

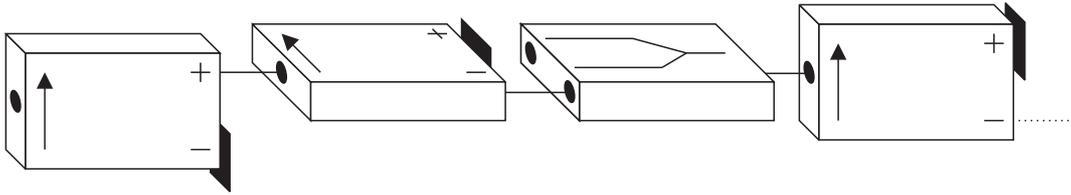


Figura 15: Canale “+” chiuso

Di nuovo, gli atomi hanno probabilità $\frac{1}{2}$ di attraversare l'interferometro; all'atto della misura la componente s_x assume il valore s_- . A questo punto, come prima, il valore di s_z non è più definito. Quando gli atomi attraversano il secondo analizzatore orientato lungo z , hanno probabilità $\frac{1}{2}$ di emergere dall'uscita aperta, ora con $s_z = s_-$.

In conclusione: un atomo che entra nell'apparato di figura (15) ha anch'esso probabilità $\frac{1}{4}$ di essere osservato all'uscita “-” dell'ultimo analizzatore.

Interferometro con entrambi i canali aperti Ora permettiamo il passaggio degli atomi attraverso entrambi i canali dell'interferometro orientato lungo x .

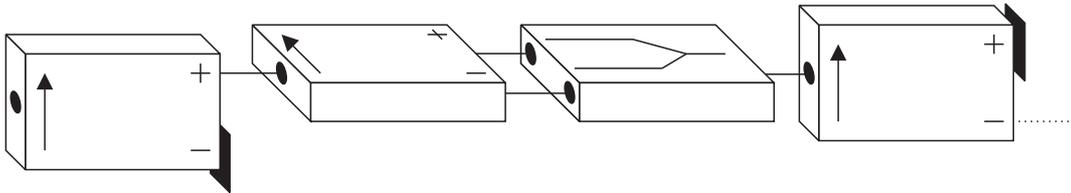


Figura 16: Canali entrambi aperti

Che cosa ci aspettiamo che avvenga questa volta? È possibile proporre due distinte linee di ragionamento, che conducono a previsioni del tutto differenti:

Ragionamento 1 Ogni atomo può attraversare l'interferometro o lungo il canale “+” o lungo il canale “-”. In ognuno dei due casi la probabilità di emergere dall'uscita “-” dell'ultimo analizzatore è pari a $\frac{1}{4}$. La probabilità totale è pertanto $\frac{1}{2}$.

Ragionamento 2 L'interferometro con entrambi i canali aperti non può selezionare gli atomi in ingresso e quindi non ha alcun effetto su di essi. Gli atomi entrano nell'interferometro con $s_z = s_+$ ed escono senza che questo valore possa essere cambiato. L'esperienza si riduce a una misura ripetuta della componente z dello spin, come nell'apparato della figura (8). Ma l'ultimo analizzatore permette l'uscita soltanto ad atomi con $s_z = s_-$. La probabilità totale è pertanto 0.

I due ragionamenti non possono essere entrambi corretti. Soltanto l'esperienza può indicare qual è quello corretto. E l'esperienza dimostra che, tutte le volte che si introduce un atomo nell'apparato di figura (16), nessun atomo emerge dall'uscita aperta dell'ultimo analizzatore. Il ragionamento 2 conduce alla previsione corretta.

4.2 Interferenza di onde e di atomi

Come può accadere che il ragionamento 1 risulti sbagliato? L'assegnazione delle probabilità per i casi in cui l'interferometro ha un solo canale aperto è certamente corretta, ed è confermata dall'esperienza. La regola per la somma delle probabilità è ben assodata. Non rimane altro che concludere che l'assunzione:

ogni atomo può attraversare l'interferometro o lungo il canale “+” o lungo il canale “-” è infondata. Per quanto ci sembri strano, la meccanica quantistica ci impedisce di fare assunzioni, per quanto apparentemente innocenti, che non corrispondono a misure effettivamente realizzate. Non possiamo affermare che un atomo abbia un valore ben definito di una particolare componente dello spin, a meno che non misuriamo tale componente. E non possiamo affermare che un atomo attraversi un canale o l'altro dell'interferometro se non andiamo effettivamente a controllare quale canale attraversa.

In altri termini: la meccanica quantistica ci permette di assegnare una probabilità all'evento finale effettivamente osservato (l'emergere o meno dell'atomo dall'uscita “-” dell'ultimo analizzatore), ma non di assegnare delle probabilità agli eventi intermedi, fra loro alternativi, attraverso i quali può realizzarsi l'evento finale.

La situazione così descritta presenta in realtà un'analogia molto feconda con un fenomeno ben noto: *l'interferenza della luce*. Se si fa incidere la luce su un ostacolo nel quale siano praticate due fenditure molto strette e molto vicine, e si chiude a turno una delle fenditure, si ottiene su uno schermo posto oltre l'ostacolo un'immagine (che può risultare sfuocata) della fenditura aperta. Ma se si aprono entrambe le fenditure, si osserva sullo schermo che alcune posizioni, prima illuminate, non lo sono più.

Com'è noto, le zone non illuminate corrispondono alle posizioni di *interferenza distruttiva* fra le onde luminose provenienti dalle due fenditure. Se le onde provenienti dalle due fenditure hanno la stessa ampiezza, nelle zone in cui le due onde sono sincronizzate in maniera tale che il valore della prima onda è sempre uguale e opposto a quello della seconda, l'effetto complessivo è lo stesso che si avrebbe se non ci fosse alcuna onda. Le due onde si sommano cancellandosi. L'ampiezza dell'onda totale è nulla, e l'intensità luminosa in quel punto, che è proporzionale al quadrato dell'ampiezza, è anch'essa nulla.

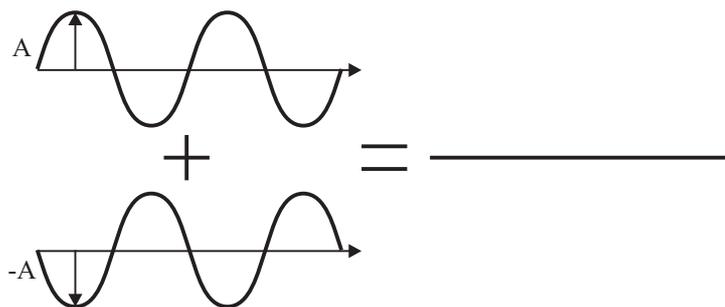


Figura 17: Interferenza distruttiva di due onde sfasate

Nel caso delle onde (luminose o meno), l'apertura di una seconda fenditura porta al risultato sorprendente per cui in alcuni punti l'intensità luminosa *diminuisce*.

Questo è ciò che accade anche con l'interferometro con entrambi i canali aperti. Mentre con un solo canale aperto c'era una probabilità del 50% di osservare un atomo in uscita, con entrambi i canali aperti non si osserva alcun atomo. Gli atomi si comportano come onde, che

possono attraversare entrambi i cammini aperti e interferire fra loro. Ma dobbiamo ricordare che la probabilità di osservare atomi in uscita è dello 0% anche quando gli atomi entrano nell'apparato *uno alla volta*. Bisogna perciò concludere che in quel caso ogni atomo *interferisce con se stesso*.

Individuiamo così il terzo aspetto notevole del comportamento dei sistemi quantistici:

- *Quando un sistema fisico può seguire diversi cammini, e non c'è modo di sapere quale cammino abbia effettivamente seguito, c'è un effetto di interferenza fra i diversi cammini. I sistemi fisici possono interferire fra loro e con se stessi.*

La presenza di interferenza nei sistemi quantistici è legata al fatto che il processo reale, che porta dalla configurazione iniziale al risultato finale, non corrisponde a *uno* dei cammini possibili, ma tiene conto di *tutti* i cammini possibili. Come le onde che interferiscono si sovrappongono, così i cammini quantistici si sovrappongono. L'aspetto notevole che abbiamo appena evidenziato si può esprimere più formalmente così:

- *I sistemi fisici obbediscono al principio di sovrapposizione.*

4.3 Ampiezze e probabilità

Il comportamento dei sistemi fisici può essere descritto mediante una tecnica detta *calcolo delle ampiezze*. Come abbiamo visto, non è possibile associare a ogni processo fisico possibile, ad esempio il passaggio dell'atomo attraverso il canale "+" dell'apparato di figura (16), una *probabilità*. In tal caso, infatti, quando un risultato (l'emergere dell'atomo dall'uscita aperta dell'apparato) può essere realizzato con modalità alternative (il passaggio attraverso il canale "+" o il canale "-"), sarebbe necessario sommare le probabilità, ottenendo una probabilità totale in contraddizione con l'esperienza.

La soluzione può essere trovata mediante l'analogia con le onde. Se pensiamo all'interferenza delle onde, ci accorgiamo che in quel caso la prescrizione:

- *calcola l'intensità di ogni onda e poi somma le intensità*

conduce anch'essa a un risultato sbagliato: poiché le intensità sono sempre positive, non si avrebbe mai interferenza distruttiva. La prescrizione corretta è invece:

- *determina l'ampiezza di ogni onda, somma le ampiezze e poi calcola l'intensità mediante l'ampiezza totale.*

Regola 1: cammini alternativi In base a questa analogia, formuliamo la seguente prescrizione per i processi quantistici che possono avvenire lungo cammini alternativi:

1. *assegna un'ampiezza (un numero) a ogni possibile cammino del sistema fra la condizione iniziale e il risultato finale;*
2. *somma le ampiezze;*
3. *calcola la probabilità elevando al quadrato l'ampiezza.*

Come si applica questa prescrizione al caso che stiamo discutendo? Ai due cammini possibili dobbiamo assegnare ampiezze uguali e opposte, dato che la probabilità del risultato finale, quando entrambi i canali sono aperti, dev'essere nulla. Chiamiamo le due ampiezze a_+ e a_- :

$$a_+ = -a_- \quad (3)$$

Le esperienze realizzate con un solo canale aperto alla volta mostrano che in quei casi la probabilità che l'atomo emerga dall'uscita aperta è ogni volta $\frac{1}{4}$. Di conseguenza:

$$(a_+)^2 = (a_-)^2 = \frac{1}{4} \quad (4)$$

Possiamo quindi porre:

$$\begin{aligned} a_+ &= +\sqrt{\frac{1}{4}} = +\frac{1}{2} \\ a_- &= -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Ma perché $a_+ = +\frac{1}{2}$? Se studiamo la figura (14) vediamo che questa è l'ampiezza per il seguente processo: Un atomo entra con $s_z = s_+$ in un analizzatore orientato lungo x , ne esce con $s_x = s_+$ ed entra in analizzatore orientato lungo z , per uscirne infine con $s_z = s_-$.

In altri termini, si tratta di un processo in più fasi *consecutive*:

1. un atomo con $s_z = s_+$ emerge dall'uscita con $s_x = s_+$; probabilità $\frac{1}{2}$;
2. un atomo con $s_x = s_+$ emerge dall'uscita con $s_z = s_-$; probabilità $\frac{1}{2}$.

Alla fase 1 associamo l'ampiezza $a_{+,1}$ e alla fase 2 associamo l'ampiezza $a_{+,2}$, con:

$$\begin{aligned} a_{+,1} &= \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a_{+,2} &= \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{6}$$

da cui si vede che l'ampiezza a_+ è il prodotto delle ampiezze delle fasi successive:

$$a_+ = a_{+,1} \cdot a_{+,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Regola 2: cammini consecutivi Formuliamo allora la seguente prescrizione per i processi quantistici che avvengono mediante una successione di cammini consecutivi:

1. *assegna un'ampiezza (un numero) a ogni cammino del sistema fra una condizione intermedia e il risultato immediatamente successivo;*
2. *moltiplica le ampiezze;*
3. *calcola la probabilità elevando al quadrato l'ampiezza.*

Le due regole enunciate in questa sezione permettono di affrontare qualsiasi problema quantistico. Occorre avere una prescrizione per scrivere le ampiezze dei singoli processi elementari, prescrizione che nel caso degli esperimenti dai noi discussi può essere ricavata dalle equazioni (1).

Questa non è la sola formulazione possibile della meccanica quantistica, e non è neppure la più agevole per la trattazione di molti casi di interesse pratico. È però un'impostazione che consente di sottolineare immediatamente gli aspetti che si discostano radicalmente dalla fisica classica, e di introdurre i principi teorici che sono alla base della nuova visione del mondo fisico.

Riferimenti bibliografici

- [1] Friedrich, Herschbach, “Stern and Gerlach: How a Bad Cigas Helped Reorient Atomic Physics” *Physics Today*, vol. 56, no. 12 (Dec. 2003)
- [2] Einstein, Podolsky, Rosen, “Can Quantum–Mechanical Description of Physical reality Be Considered Complete?” *Physical review*, ser. 2, XLVII, pp.777–80; tradotto in Einstein, *Opere scelte*, 1988
- [3] Bell, “On Einstein–Podolsky–Rosen paradox” *Physics*, 1, pp.195–200; ora in Bell, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, 1993
- [4] Feynman, Leighton, Sands, *La fisica di Feynman 3. Meccanica quantistica*, 2001
- [5] Dirac, *I principi della meccanica quantistica*, 1979
- [6] Styer, *The Strange World of Quantum Mechanics*, 2000
- [7] Fabri, *Introduzione alla fisica quantistica*, <ftp://osiris.df.unipi.it/pub/sagredo/fq/>
- [8] Sakurai, *Meccanica quantistica moderna*, 1990
- [9] Ghirardi, *Un’occhiata alle carte di Dio*, 1997
- [10] Eisberg, Resnick, *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*, 1985
- [11] Cohen–Tannoudji, Diu, Laloë, *Mécanique quantique*, 1998